

Représentations irréductibles de certaines algèbres
d'opérateurs différentiels
Irreducible representations of some differential
operator algebras

Alexis TCHOUDJEM
Institut Camille Jordan
Université Claude Bernard Lyon I
Boulevard du Onze Novembre 1918
69622 Villeurbanne
FRANCE
tchoudjem@math.univ-lyon1.fr

Villeurbanne, le 25 janvier 2010

Abstract : For a projective variety X and a line bundle L over X , one considers the L –twisted global differential operator algebra $\mathcal{D}_L(X)$ which naturally operates on the space of global sections $H^0(X, L)$. In the case where X is the wonderful compactification of the group PGL_3 , one proves that the space $H^0(X, L)$ is an irreducible representation of the algebra $\mathcal{D}_L(X)$ or zero. For that, one introduces a 2–order differential operator which is defined over whole X but which does not arise from the infinitesimal action of the automorphism group $\mathrm{Aut}(X)$.

Introduction

According to the famous Borel-Weil theorem, if X is a flag variety and if L is a line bundle over X , then the space $H^0(X, L)$ is an irreducible representation of the Lie algebra of the automorphism group of X , or 0. If \overline{G} is the wonderful compactification of an adjoint semisimple algebraic group G , then all the line bundles over \overline{G} are $\widehat{G} \times \widehat{G}$ –linearized (\widehat{G} being the universal covering of G) and the space of global sections $H^0(\overline{G}, L)$ is a representation of $\widehat{G} \times \widehat{G}$ which is reducible in general. Now, the algebra $\mathcal{D}_L(\overline{G})$ operates on $H^0(\overline{G}, L)$ too; that algebra is the global section algebra of a sheaf of algebras defined from L and the sheaf of differential operators over \overline{G} . In the case where G is PGL_3 , one gives a 2–order differential operator defined over whole \overline{G} (*cf.* théorème 8.4). Then, by using this operator, one proves that the space $H^0(\overline{G}, L)$ is irreducible (or zero) as a $\mathcal{D}_L(\overline{G})$ –module, for all line bundles L over \overline{G} . One finishes with a similar result over the « complete conic variety » (*cf.* théorème 10.1).

Résumé : À une variété projective X et à un fibré en droites L sur X , on peut associer une algèbre $\mathcal{D}_L(X)$, l’algèbre des L –opérateurs différentiels globaux sur X , qui opère naturellement sur l’espace des sections globales $H^0(X, L)$. On montre ici que dans le cas particulier où X est la compactification magnifique du groupe PGL_3 , l’espace $H^0(X, L)$ est soit nul soit une représentation irréductible de l’algèbre $\mathcal{D}_L(X)$. On introduit pour cela un opérateur différentiel d’ordre 2 défini sur tout X mais qui ne provient pas de l’action infinitésimale sur X du groupe d’automorphismes $\mathrm{Aut} X$.

Table des matières

Introduction	3
1 Opérateurs différentiels sur une variété	4
1.1 Opérateurs différentiels tordus par un faisceau inversible . . .	4
1.2 Action de groupes	5
2 Compactifications magnifiques des groupes adjoints	6
3 Immersion dans un produit d'espaces projectifs	6
3.1 Notations	6
4 La grosse cellule	7
5 Le groupe de Picard	8
6 Sections des faisceaux inversibles	8
6.1 sur la grosse cellule	8
6.2 sections globales	8
7 Cas particulier	9
8 Formules de changement de variables	10
8.1 Fonctions	10
8.2 Dérivations issues de l'action de l'algèbre de Lie	11
8.3 Un opérateur différentiel d'ordre 2	13
8.4 Opérateurs différentiels tordus	16
9 Irréductibilité des espaces de sections globales	18
10 Autre cas	24
Références	24

Soit \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Introduction

D'après le célèbre théorème de Borel-Weil, si X est une variété de drapeaux et si L est un fibré en droites sur X , alors, lorsqu'il est non nul, l'espace $H^0(X, L)$ est une représentation irréductible de l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de X . Si \overline{G} est la compactification magnifique d'un groupe algébrique semi-simple adjoint G , alors tout fibré en droites L sur \overline{G} est $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -linéarisé (\widehat{G} est le revêtement universel de G) et l'espace

des sections globales $H^0(\overline{G}, L)$ est une représentation de $\widehat{G} \times \widehat{G}$ qui est réductible en général. Mais sur $H^0(\overline{G}, L)$, l'anneau $\mathcal{D}_L(\overline{G})$ opère aussi ; c'est l'algèbre des sections globales d'un faisceau d'algèbres défini à partir de L et du faisceau des opérateurs différentiels sur \overline{G} . On donne ici dans le cas particulier où $G = \mathrm{PGL}_3$ un opérateur différentiel d'ordre 2 défini sur tout \overline{G} (cf. le théorème 8.4). Puis on démontre en utilisant cet opérateur que l'espace $H^0(\overline{G}, L)$ est irréductible (ou nul) comme $\mathcal{D}_L(\overline{G})$ -module pour tout fibré en droites L sur \overline{G} . On termine par un résultat analogue sur la variété des « coniques complètes » (cf. le théorème 10.1).

1 Opérateurs différentiels sur une variété

Soit X une variété algébrique lisse.

On rappelle ici la définition du faisceau \mathcal{D}_X des opérateurs différentiels sur X .

On note $\mathcal{E}nd_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}_X)$ le faisceau des \mathbf{k} -endomorphismes locaux de \mathcal{O}_X . On identifiera \mathcal{O}_X à un sous-faisceau $\mathcal{E}nd_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}_X)$.

On pose : $\mathcal{D}_X^{(0)} := \mathcal{O}_X$ et pour tout $n \geq 0$ et tout ouvert U de X :

$$\Gamma(U, \mathcal{D}_X^{(n+1)}) :=$$

$$\left\{ d \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}_U) : \forall V \subseteq U \text{ ouvert}, \forall a \in \mathcal{O}_X(U), [d|_V, a] \in \mathcal{D}_X^{(n)}(V) \right\} .$$

Définition 1

$$\mathcal{D}_X := \cup_{n \geq 0} \mathcal{D}_X^{(n)} .$$

On notera $\mathcal{D}(X)$ l'anneau $\Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ des opérateurs différentiels globaux sur X .

EXEMPLE : Si $\mathbb{P}^1 = \{[x_0 : x_1] : (x_0, x_1) \in \mathbf{k}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$, alors :

$$\mathcal{D}(\mathbb{P}^1) = \mathbf{k}[x_0 \partial_{x_0}, x_0 \partial_{x_1}, x_1 \partial_{x_0}]$$

(avec $x_1 \partial_{x_1} = -x_0 \partial_{x_0}$).

1.1 Opérateurs différentiels tordus par un faisceau inversible

Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur X . On rappelle que le faisceau d'algèbres des opérateurs différentiels tordus par \mathcal{L} , noté $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$, est un sous-faisceau de $\mathcal{E}nd_{\mathbf{k}}(\mathcal{L})$ défini comme le faisceau \mathcal{D}_X , par récurrence :

On pose $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}^{(0)} := \mathcal{O}_X$ et pour tout $n \geq 0$ et tout U ouvert de X :

$$\Gamma(U, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^{(n+1)}) :=$$

$$\left\{ d \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathcal{L}|_U) : \forall V \subseteq U \text{ ouvert}, \forall a \in \mathcal{O}_X(V), [d|_V, a] \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^{(n)}(V) \right\} .$$

Définition 2

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} := \cup_{n \geq 0} \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^{(n)} .$$

EXEMPLE : Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $\mathcal{L}_n := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ le faisceau inversible des fonctions n -homogènes. On a :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}_n}(\mathbb{P}^1) = \mathbf{k}[x_0 \partial_{x_0}, x_0 \partial_{x_1}, x_1 \partial_{x_0}]$$

(avec $x_1 \partial_{x_1} = n - x_0 \partial_{x_0}$).

Remarques :

1) On a un isomorphisme de faisceaux d'algèbres :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} \simeq \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1} .$$

2) L'algèbre $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(X)$ opère naturellement sur tous les groupes de cohomologie $H^i(U, \mathcal{L})$, pour tout $i \geq 0$ et tout U ouvert de X .

1.2 Action de groupes

Si G est un groupe algébrique qui agit algébriquement sur X et si \mathcal{L} est un faisceau inversible G -linéarisé sur X , alors l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie de G , \mathfrak{g} , sur X (cf. [2][§1]) induit un morphisme naturel d'algèbres associatives :

$$U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(X)$$

(où $U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g}).

EXEMPLE : — Si $X = \mathbb{P}^1$ et $G = SL_2$, \mathfrak{sl}_2 son algèbre de Lie, alors on a un morphisme surjectif :

$$U(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}_n}(\mathbb{P}^1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto -x_1 \partial_{x_0}, -x_0 \partial_{x_1}, -x_0 \partial_{x_0} + x_1 \partial_{x_1} .$$

— En revanche, si X est l'éclatement de \mathbb{P}^2 en $0 := [1 : 0 : 0]$, si

$$G := \text{Aut} X = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \in \text{PGL}_3(\mathbf{k}) \right\}, \text{ le morphisme :}$$

$$U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}(X)$$

n'est pas surjectif.

2 Compactifications magnifiques des groupes adjoints

Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple et adjoint. On notera $R : \widehat{G} \rightarrow G$ son revêtement universel (\widehat{G} est semi-simple simplement connexe et $\ker R$ est le centre de \widehat{G}). On notera \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G .

Les multiplications à gauche et à droite définissent une action de $G \times G$ sur G . D'après [1, §2], il existe une compactification magnifique de G *c-à-d* une variété projective, lisse et connexe, notée \overline{G} qui contient G telle que :

- i) $G \times G$ agit sur \overline{G} et cette action prolonge l'action sur G ;
- ii) G est ouvert dans \overline{G} ;
- iii) si on note Z_1, \dots, Z_r les composantes irréductibles de $\overline{G} \setminus G$ (les *diviseurs limitrophes*), alors $\overline{G} \setminus G = Z_1 \cup \dots \cup Z_r$ est un diviseur à croisements normaux et r est le rang de G ;
- iv) chaque adhérence de $G \times G$ -orbite de \overline{G} est l'intersection (transverse) des Z_i qui la contiennent ;
- v) l'intersection $Z_1 \cap \dots \cap Z_r$ est l'unique orbite fermée de \overline{G} .

3 Immersion dans un produit d'espaces projectifs

Soient $\widehat{T} \subseteq \widehat{B}$ un tore maximal et un sous-groupe de Borel de \widehat{G} . On pose $T := R(\widehat{T})$, $B := R(\widehat{B})$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ la base correspondante du système de racines de (G, T) (les α_i sont en fait des caractères de T). Soient $\omega_1, \dots, \omega_r$ les poids fondamentaux correspondant à cette base (ce sont des caractères de \widehat{T}). Notons $\rho_1 : \widehat{G} \rightarrow \mathrm{GL}(V_{\omega_1}), \dots, \rho_r : \widehat{G} \rightarrow \mathrm{GL}(V_{\omega_r})$ les représentations irréductibles de \widehat{G} associées.

Posons aussi pour tout $i : E_{\omega_i} := \mathrm{End}(V_{\omega_i})$.

Considérons

$$\begin{aligned} i : G &\rightarrow \mathbb{P}(E_{\omega_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(E_{\omega_r}) \\ g &\mapsto ([\rho_1(g)], \dots, [\rho_r(g)]) \end{aligned}$$

Le morphisme i est une immersion et on peut identifier \overline{G} à $\overline{i(G)}$.

On notera pour tous $g, g' \in G$, $x \in \overline{G}$, $gxg' := (g, g'^{-1}).x$.

3.1 Notations

Fixons quelques notations.

Soient \widehat{B}^- (resp. B^-) le sous-groupe de Borel opposé à \widehat{B} relativement à \widehat{T} (resp. opposé à B relativement à T).

On notera aussi U et U^- les radicaux unipotents de B et B^- , \mathfrak{n} et \mathfrak{n}^- les algèbres de Lie de U et U^- .

La variété \overline{G} possède un unique point fixe pour $B^- \times B$. Notons le \mathbf{z} . Pour tout caractère λ de \widehat{T} dominant (par rapport à \widehat{B}), on note V_λ le \widehat{G} -module irréductible de plus haut poids λ et λ^* le plus haut poids du \widehat{G} -module

irréductible dual V_λ^* . On choisit $v_\lambda \in V_\lambda$ et $v_{-\lambda}^* \in V_\lambda^*$ un \widehat{B} -vecteur propre de poids λ et un \widehat{B}^- -vecteur propre de poids $-\lambda$ tels que $\langle v_{-\lambda}^*, v_\lambda \rangle = 1$. De même, on choisit un \widehat{B}^- -vecteur propre $v_{-\lambda^*} \in V_\lambda$ et un \widehat{B} -vecteur propre $v_{\lambda^*}^* \in V_\lambda^*$. Si on considère \overline{G} comme une sous-variété fermée de $\mathbb{P}(E_{\omega_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(E_{\omega_r})$ et compte tenu de l'identification :

$$E_{\omega_i} = V_{\omega_i} \otimes V_{\omega_i}^*$$

on a :

$$\mathbf{z} = ([v_{-\omega_1^*} \otimes v_{\omega_1^*}^*], \dots, [v_{-\omega_r^*} \otimes v_{\omega_r^*}^*]) \ .$$

4 La grosse cellule

Il existe un ouvert (unique) de \overline{G} , noté $(\overline{G})_0$ et appelé la *grosse cellule*, qui est $B \times B^-$ invariant et isomorphe à un espace affine.

De plus, $\overline{G} = (G \times G).(\overline{G})_0$ et $BB^- = (\overline{G})_0 \cap G$.

De plus, la décomposition $BB^- = UTU^- \simeq U \times T \times U^-$ se « prolonge » à $(\overline{G})_0$. En effet, si on pose $(\overline{T})_0 := \overline{T} \cap (\overline{G})_0$, on a un isomorphisme :

$$U \times (\overline{T})_0 \times U^- \rightarrow (\overline{G})_0$$

$$(u, x, u') \mapsto uxu' \ .$$

Ajoutons que pour tout $1 \leq i \leq r$, le caractère $\alpha_i : T \rightarrow \mathbb{G}_m$ se prolonge en un morphisme, encore noté $\alpha_i : (\overline{T})_0 \rightarrow \mathbb{A}^1$ et que l'on a aussi un isomorphisme :

$$(\overline{T})_0 \rightarrow \mathbb{A}^r$$

$$x \mapsto (\alpha_1(x), \dots, \alpha_r(x)) \ .$$

Pour simplifier, on notera encore α_i les morphismes :

$$(\overline{G})_0 \rightarrow \mathbb{A}^1$$

$$uxu' \mapsto \alpha_i(x)$$

(pour tout $u \in U$ et tout $u' \in U^-$).

En particulier, $\mathbf{k}[(\overline{G})_0] = \mathbf{k}[U \times U^-][\alpha_1, \dots, \alpha_r]$.

En fait, on a aussi :

$$(\overline{G})_0 = \left\{ ([A_1], \dots, [A_r]) \in \overline{G} \subseteq \mathbb{P}(E_{\omega_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(E_{\omega_r}) : \forall 1 \leq i \leq r, f_i(A_i) \neq 0 \right\} .$$

où pour tout i , f_i est la forme linéaire :

$$f_i : E_{\omega_i} \rightarrow \mathbf{k}, \ A \mapsto \langle v_{\omega_i^*}^*, Av_{-\omega_i^*} \rangle \ .$$

De plus, les diviseurs limitrophes Z_i vérifient :

$$Z_i \cap (\overline{G})_0 = \left\{ x \in (\overline{G})_0 : \alpha_i(x) = 0 \right\} \ .$$

5 Le groupe de Picard

Rappelons la description des fibrés en droites (ou des faisceaux inversibles) sur \overline{G} .

Tous les faisceaux inversibles sur \overline{G} sont $\widehat{G} \times \widehat{G}$ –linéarisés de manière unique de plus :

Proposition 5.1 (cf. [1, §8]) *On a un isomorphisme :*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^r &\rightarrow \text{Pic}(\overline{G}) \\ (n_1, \dots, n_r) &\mapsto \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\omega_1})}(n_1) \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\omega_r})}(n_r) \right) |_{\overline{G}} . \end{aligned}$$

Si $\lambda = n_1\omega_1 + \dots + n_r\omega_r$ est un caractère de \widehat{T} , on posera :

$$\mathcal{L}_\lambda := \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\omega_1})}(n_1) \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\omega_r})}(n_r) \right) |_{\overline{G}} .$$

En particulier, sur la fibre $\mathcal{L}_\lambda|_{\mathbf{z}}$, le tore $\widehat{T} \times \widehat{T}$ agit avec le poids $(\lambda^*, -\lambda^*)$ où si l'on note W le groupe de Weyl de (G, T) et w_0 l'élément le plus long de W , $\lambda^* := -w_0\lambda$.

Remarque : si on note $\mathcal{O}_{\overline{G}}(Z_i)$ le faisceau inversible associé au diviseur Z_i , on a un isomorphisme de faisceaux $G \times G$ –linéarisés :

$$\mathcal{O}_{\overline{G}}(Z_i) \simeq \mathcal{L}_{\alpha_i^*} .$$

6 Sections des faisceaux inversibles

6.1 sur la grosse cellule

La grosse cellule $(\overline{G})_0$ est isomorphe à un espace affine donc pour tout caractère λ de \widehat{T} , $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda)$ est un $k[(\overline{G})_0]$ –module libre de rang 1. Si $\lambda = n_1\omega_1 + \dots + n_r\omega_r$, alors :

$$\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda) = \mathbf{k}[(\overline{G})_0] f_\lambda$$

où $f_\lambda := (f_1^{n_1} \boxtimes \dots \boxtimes f_r^{n_r})|_{(\overline{G})_0}$.

6.2 sections globales

Rappelons que l'on considère les caractères α_i , ($1 \leq i \leq r$), comme des fonctions régulières $U \times U^-$ –invariantes sur la grosse cellule $(\overline{G})_0$ (cf. §4) .

Théorème 6.1 (cf. [1, §8.2]) *Pour tout caractère λ de \widehat{T} , on a un isomorphisme de $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ –modules :*

$$\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda) \simeq \bigoplus_{\substack{m_1, \dots, m_r \geq 0 \\ \lambda^* - m_1\alpha_1 - \dots - m_r\alpha_r \text{ dominant}}} U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_r^{m_r} f_\lambda .$$

7 Cas particulier

On suppose maintenant que $G = \mathrm{PGL}_3(\mathbf{k})$. Dans ce cas :

$$\widehat{G} = \mathrm{SL}_3(\mathbf{k}), r = 2$$

Les sous-groupes $\widehat{T}, T, \widehat{B}, B, \widehat{B}^-, B^-$ sont respectivement les sous-groupes des matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Si on note ϵ_i le caractère :

$$\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{pmatrix} \mapsto t_i$$

on a : $\omega_1 = \epsilon_1, \omega_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3$.

On a avec ces notations :

$$E_{\omega_1} = \mathrm{End}(\mathbf{k}^3) \text{ et } E_{\omega_2} = \mathrm{End}(\bigwedge^2 \mathbf{k}^3) \simeq \mathrm{End}(\mathbf{k}^3) .$$

Donc si l'on prend pour base de \mathbf{k}^3 la base canonique e_1, e_2, e_3 et pour base de $\bigwedge^2 \mathbf{k}^3$ la base canonique duale : $e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2$, on a $E_{\omega_1} \simeq E_{\omega_2} \simeq M_3(\mathbf{k})$.

En particulier, le plongement de G dans \overline{G} est donné par :

$$G \rightarrow \mathbb{P}^8(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^8(\mathbf{k})$$

$$[g] \mapsto ([g], [\mathrm{Com}(g)])$$

où $\mathrm{Com}(g)$ est la comatrice de g .

On en déduit une description explicite de $\overline{\mathrm{PGL}_3(\mathbf{k})}$ avec des équations :

Proposition 7.1 *Si $G = \mathrm{PGL}_3(\mathbf{k})$, alors :*

$$\overline{G} = \left\{ ([g], [g']) \in \mathbb{P}(M_3(\mathbf{k})) \times \mathbb{P}(M_3(\mathbf{k})) : g^t g' \in \mathbf{k} I_3 \right\}$$

où I_3 est la matrice identité 3×3 .

De plus, si on note $g_{i,j}$ le (i, j) -ième coefficient d'une matrice g , on a :

$$(\overline{G})_0 = \left\{ ([g], [g']) \in \overline{G} : g_{3,3} g'_{1,1} \neq 0 \right\}$$

$$(\overline{T})_0 = \left\{ \left(\begin{bmatrix} t_2 t'_2 & & \\ & t_2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & t'_2 & \\ & & t_2 t'_2 \end{bmatrix} \right) : t_2, t'_2 \in \mathbf{k} \right\} .$$

Soit $a := \left(\begin{bmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t'_1 & & \\ & t'_2 & \\ & & t'_3 \end{bmatrix} \right) \in (\overline{T})_0$. Pour tout

$$u = \begin{bmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{1,3} \\ & 1 & u_{2,3} \\ & & 1 \end{bmatrix} \in U, \text{ tout } u' = \begin{bmatrix} 1 & & \\ u_{2,1} & 1 & \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \in U^-,$$

on a :

$$\alpha_1(uau') = \frac{t'_2}{t'_1}, \alpha_2(uau') = \frac{t_2}{t_3}$$

et on pose $U_{i,j}(uau') := u_{i,j}$ si $1 \leq i \neq j \leq 3$.

Ainsi, $\mathbf{k}[(\overline{G})_0] = k[U_{i,j} : 1 \leq i \neq j \leq 3][\alpha_1, \alpha_2]$.

On remarque enfin que dans ce cas particulier, les diviseurs Z_1 et Z_2 sont définis par :

$$Z_1 = \left\{ ([g], [g']) \in \overline{G} : \text{rg}(g) = 1 \right\}, \quad Z_2 = \left\{ ([g], [g']) \in \overline{G} : \text{rg}(g') = 1 \right\}.$$

8 Formules de changement de variables

8.1 Fonctions

Puisque

$$G \cap (\overline{G})_0 = BB^- = \{[g] \in G : g_{3,3} \neq 0, g_{2,2}g_{3,3} - g_{2,3}g_{3,2} \neq 0\}$$

les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, U_{i,j}, 1 \leq i \neq j \leq 3$ sont régulières sur BB^- . On peut donc les exprimer en fonction des coordonnées $g_{i,j}$ de la matrice g . En posant $\Delta_{i,j}(g) := (-1)^{i+j} \text{Com}(g)_{i,j}$ et $\Delta(g) := \det(g)$, on trouve :

Proposition 8.1 *Pour tout $g \in BB^-$,*

$$\alpha_1(g) = \frac{g_{3,3}\Delta(g)}{\Delta_{1,1}^2(g)}$$

$$\alpha_2(g) = \frac{\Delta_{1,1}(g)}{g_{3,3}^2}$$

$$U_{1,2}(g) = \frac{\Delta_{2,1}(g)}{\Delta_{1,1}(g)}$$

$$U_{2,1}(g) = \frac{\Delta_{1,2}(g)}{\Delta_{1,1}(g)}$$

$$U_{1,3}(g) = \frac{g_{1,3}}{g_{3,3}}$$

$$U_{3,1}(g) = \frac{g_{3,1}}{g_{3,3}}$$

$$U_{2,3}(g) = \frac{g_{2,3}}{g_{3,3}}$$

$$U_{3,2}(g) = \frac{g_{3,2}}{g_{3,3}}$$

et réciproquement :

$$\frac{g_{1,1}}{g_{3,3}} = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 U_{1,2} U_{2,1} + U_{1,3} U_{3,1}$$

$$\frac{g_{1,2}}{g_{3,3}} = \alpha_2 U_{1,2} + U_{1,3} U_{3,2}$$

$$\frac{g_{1,3}}{g_{3,3}} = U_{1,3}$$

$$\frac{g_{2,1}}{g_{3,3}} = \alpha_2 U_{2,1} + U_{2,3} U_{3,1}$$

$$\frac{g_{2,2}}{g_{3,3}} = \alpha_2 + U_{2,3} U_{3,2}$$

$$\frac{g_{2,3}}{g_{3,3}} = U_{2,3}$$

$$\frac{g_{3,1}}{g_{3,3}} = U_{3,1}$$

$$\frac{g_{3,2}}{g_{3,3}} = U_{3,2}$$

8.2 Dérivations issues de l'action de l'algèbre de Lie

On choisit la base suivante de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$:

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\xi \in U(\mathfrak{g})$, on note $\xi^{(g)}$ l'image de $(\xi, 0) \in U(\mathfrak{g} \times 0)$ dans $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$.
Soit Φ_0 le morphisme d'algèbres :

$$\Phi_0 : U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}(\overline{G})$$

induit par l'action de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sur $\mathcal{O}_{\overline{G}}$.

Comme $\mathcal{D}(\overline{G}) \subseteq \Gamma(G, \mathcal{D}_{\overline{G}}) \cap \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}})$, on peut exprimer les $\Phi_0(\xi^{(g)})$, $\xi \in \mathfrak{g}$, en fonction des coordonnées de G et en fonction des coordonnées de $(\overline{G})_0$:

Proposition 8.2 Dans l'anneau $\Gamma(G, \mathcal{D}_{\overline{G}})$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_0(Y_1^{(g)}) &= -g_{1,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} - g_{1,2} \frac{\partial}{\partial g_{2,2}} - g_{1,3} \frac{\partial}{\partial g_{2,3}}, \\ \Phi_0(Y_2^{(g)}) &= -g_{2,1} \frac{\partial}{\partial g_{3,1}} - g_{2,2} \frac{\partial}{\partial g_{3,2}} - g_{2,3} \frac{\partial}{\partial g_{3,3}}, \\ \Phi_0(Y_3^{(g)}) &= -g_{3,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} - g_{1,2} \frac{\partial}{\partial g_{3,2}} - g_{1,3} \frac{\partial}{\partial g_{3,3}}, \\ \Phi_0(X_1^{(g)}) &= -g_{2,1} \frac{\partial}{\partial g_{1,1}} - g_{2,2} \frac{\partial}{\partial g_{1,2}} - g_{2,3} \frac{\partial}{\partial g_{1,3}}, \\ \Phi_0(X_2^{(g)}) &= -g_{3,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} - g_{3,2} \frac{\partial}{\partial g_{2,2}} - g_{3,3} \frac{\partial}{\partial g_{2,3}}, \\ \Phi_0(X_3^{(g)}) &= -g_{3,1} \frac{\partial}{\partial g_{1,1}} - g_{3,2} \frac{\partial}{\partial g_{1,2}} - g_{3,3} \frac{\partial}{\partial g_{1,3}}, \\ \Phi_0(H_1^{(g)}) &= -g_{1,1} \frac{\partial}{\partial g_{1,1}} - g_{1,2} \frac{\partial}{\partial g_{1,2}} - g_{1,3} \frac{\partial}{\partial g_{1,3}} + g_{2,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} + g_{2,2} \frac{\partial}{\partial g_{2,2}} + g_{2,3} \frac{\partial}{\partial g_{2,3}}, \\ \Phi_0(H_2^{(g)}) &= -g_{2,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} - g_{2,2} \frac{\partial}{\partial g_{2,2}} - g_{2,3} \frac{\partial}{\partial g_{2,3}} + g_{3,1} \frac{\partial}{\partial g_{3,1}} + g_{3,2} \frac{\partial}{\partial g_{3,2}} + g_{3,3} \frac{\partial}{\partial g_{3,3}}. \end{aligned}$$

Dans l'anneau $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}})$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_0(Y_1^{(g)}) &= 2U_{1,2}\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - U_{1,2}\alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\ &\quad - U_{1,3} \frac{\partial}{\partial U_{2,3}} - U_{1,2}^2 \frac{\partial}{\partial U_{1,2}} \\ &\quad - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial U_{2,1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_0(Y_2^{(g)}) &= -U_{2,3}\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + 2U_{2,3}\alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\
&\quad + (U_{1,3} - U_{1,2}U_{2,3}) \frac{\partial}{\partial U_{1,2}} + U_{2,3}^2 \frac{\partial}{\partial U_{2,3}} - U_{1,3}U_{2,3} \frac{\partial}{\partial U_{1,3}} \\
&\quad - \alpha_2 (U_{2,1} \frac{\partial}{\partial U_{3,1}} + \frac{\partial}{\partial U_{3,2}}) , \\
\Phi(Y_3^{(g)}) &= (U_{1,3} - 2U_{1,3}U_{3,2})\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + (U_{1,3} + U_{1,2}U_{2,3})\alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\
&\quad + (U_{1,3} - U_{1,2}U_{2,3})U_{1,2} \frac{\partial}{\partial U_{1,2}} + U_{1,3}U_{2,3} \frac{\partial}{\partial U_{2,3}} + U_{1,3}^2 \frac{\partial}{\partial U_{1,3}} \\
&\quad + \alpha_1 U_{2,3} \frac{\partial}{\partial U_{2,1}} - \alpha_2 (U_{1,2} \frac{\partial}{\partial U_{3,2}} + U_{1,2}U_{2,1} \frac{\partial}{\partial U_{3,1}}) - \alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial}{\partial U_{3,1}} , \\
\Phi_0(X_1^{(g)}) &= -\frac{\partial}{\partial U_{1,2}} - U_{2,3} \frac{\partial}{\partial U_{1,3}} , \\
\Phi_0(X_2^{(g)}) &= -\frac{\partial}{\partial U_{2,3}} , \\
\Phi_0(X_3^{(g)}) &= -\frac{\partial}{\partial U_{1,3}} .
\end{aligned}$$

Démonstration : Par exemple, pour la deuxième liste de formules, on utilise que :

$$\Phi_0(\xi^{(g)}) = (\xi^{(g)}.\alpha_1) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + (\xi^{(g)}.\alpha_2) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (\xi^{(g)}.U_{i,j}) \frac{\partial}{\partial U_{i,j}}$$

pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$.

Q.e.d.

8.3 Un opérateur différentiel d'ordre 2

Comme $(\overline{G})_0$ est isomorphe à un espace affine,

$$\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}}) = \mathbf{k}[\alpha_1, \alpha_2, U_{i,j} : 1 \leq i \neq j \leq 3][\partial_{\alpha_1}, \partial_{\alpha_2}, \partial_{U_{i,j}} : 1 \leq i \neq j \leq 3] .$$

De plus, comme BB^- est un ouvert de G ,

$$\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}}) \subseteq \Gamma(BB^-, \mathcal{D}_{\overline{G}}) \subseteq \mathbf{k}(g_{i,j} : 1 \leq i, j \leq 3)[\partial_{g_{k,l}} : 1 \leq k, l \leq 3] .$$

On peut donc exprimer en particulier ∂_{α_1} et ∂_{α_2} en fonction des fonctions coordonnées $g_{i,j}$ et des dérivées partielles $\partial_{g_{k,l}}$:

Proposition 8.3 *On a :*

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_1} &= \frac{\Delta_{1,1}}{g_{3,3}} \partial_{g_{1,1}} \\
\partial_{\alpha_2} &= \frac{g_{3,3}}{\Delta_{1,1}} (\Delta_{2,2} \partial_{g_{1,1}} + \Delta_{1,1} \partial_{g_{2,2}} + \Delta_{2,1} \partial_{g_{1,2}} + \Delta_{1,2} \partial_{g_{2,1}}) .
\end{aligned}$$

Démonstration : Posons $(F_1, \dots, F_8) := (\alpha_1, \alpha_2, U_{1,2}, \dots, U_{3,2})$
et $(x_1, \dots, x_8) := (\frac{g_{1,1}}{g_{3,3}}, \dots, \frac{g_{3,2}}{g_{3,3}})$. Les coefficients de l'inverse de la matrice jacobienne :

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 8}$$

donnent les coefficients des dérivations $\partial_{\alpha_1}, \dots$ en fonction des dérivations $\frac{\partial g_{i,j}}{\partial g_{3,3}} = g_{3,3} \partial_{g_{i,j}}, 1 \leq i, j \leq 3, (i, j) \neq (3, 3)$. **Q.e.d.**

On remarque en particulier que :

$$\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} = \partial_{g_{1,1}} (\Delta_{2,2} \partial_{g_{1,1}} + \Delta_{1,1} \partial_{g_{2,2}} + \Delta_{2,1} \partial_{g_{1,2}} + \Delta_{1,2} \partial_{g_{2,1}}) \in \Gamma(G, \mathcal{D}_{\overline{G}}) .$$

On en déduit :

Théorème 8.4 *L'opérateur différentiel*

$$D_0 := \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} = \partial_{g_{1,1}} (\Delta_{2,2} \partial_{g_{1,1}} + \Delta_{1,1} \partial_{g_{2,2}} + \Delta_{2,1} \partial_{g_{1,2}} + \Delta_{1,2} \partial_{g_{2,1}})$$

est défini sur \overline{G} tout entier.

Remarques :

- Les opérateurs différentiels ∂_{α_i} ($i = 1$ ou 2) ne sont pas dans $\mathcal{D}(\overline{G})$;
- on peut vérifier que l'opérateur différentiel D_0 n'est pas l'image d'un élément de $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ car, par exemple, il ne commute pas avec l'élément de Casimir standard de $U(\mathfrak{g} \times 0)$ (ou $U(0 \times \mathfrak{g})$).

Démonstration : Puisque D_0 appartient au $G \times G$ -module rationnel $\Gamma(G, \mathcal{D}_{\overline{G}})$, D_0 est $U(\mathfrak{n}^- \times \mathfrak{n}^-)$ -fini et $U(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n})$ -fini. Donc d'après le lemme de prolongement 8.5 qui suit, il existe un ouvert Ω , contenant $(\overline{G})_0$, $U^- \times U^-$ et $U \times U$ -stable, tel que $D_0 \in \Gamma(\Omega, \mathcal{D}_{\overline{G}})$. Or, comme G est engendré par U et U^- , Ω est $G \times G$ -stable et $\Omega = (G \times G) \cdot (\overline{G})_0 = \overline{G}$.

Q.e.d.

Pour le lemme suivant, on note \mathfrak{g}_a l'algèbre de Lie du groupe \mathbb{G}_a et pour tout $i \geq 0$, \mathfrak{g}_a^i le sous-espace $\mathbf{k}d^i$ de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_a)$ (pour un générateur quelconque d de \mathfrak{g}_a).

Lemme 8.5 (de prolongement) *Soit Y une \mathbb{G}_a -variété. Soit \mathcal{F} un faisceau localement libre de \mathcal{O}_Y -modules et \mathbb{G}_a -linéarisé sur Y . Soit Ω un ouvert de Y . Alors la \mathbb{G}_a -linéarisation de \mathcal{F} induit une structure de $U(\mathfrak{g}_a)$ -module sur $\Gamma(\Omega, \mathcal{F})$.*

Soit $\sigma \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$. Si pour un certain $n_0 \geq 0$ $\mathfrak{g}_a^{n_0} \cdot \sigma = 0$, alors il existe $\tilde{\Omega}$ un ouvert \mathbb{G}_a -stable de Y et $\tilde{\sigma} \in \Gamma(\tilde{\Omega}, \mathcal{F})$ tel que :

$$\tilde{\sigma}|_{\Omega} = \sigma$$

(autrement dit σ se prolonge en une section définie sur un ouvert \mathbb{G}_a -stable).

Démonstration : Notons $\mu : \mathbb{G}_a \times Y \rightarrow Y$ le morphisme défini par l'action : $(g, y) \mapsto g.y$ et $p : \mathbb{G}_a \times Y \rightarrow Y$ la projection sur Y . Le faisceau \mathcal{F} est \mathbb{G}_a -linéarisé : cela signifie qu'il existe un isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_a \times Y}$ -modules :

$$\Phi : \mu^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p^* \mathcal{F}$$

qui vérifie les conditions de [3, 1 §3 def. 1.6].

Pour tout $n > 0$, soit $\mathbb{G}_{a,n} := \text{Spec}(\mathbf{k}[T]/(T^n))$ le n -ième voisinage infinitésimal de 0 dans \mathbb{G}_a . La restriction Φ_n de Φ à $\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega$ donne un isomorphisme :

$$\Phi_n : \mu^* \mathcal{F}|_{\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega} \xrightarrow{\sim} p^* \mathcal{F}|_{\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega}$$

or, $p^* \mathcal{F}|_{\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega} \simeq \mathbf{k}[T]/(T^n) \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{F}|_{\Omega}$.

Notons $\mu^* \sigma$ l'image de σ dans $\Gamma(\mu^{-1}\Omega, \mu^* \mathcal{F})$ par le morphisme naturel $\mathcal{F} \rightarrow \mu_* \mu^* \mathcal{F}$.

On a pour tout $n > 0$, $\Phi_n(\mu^* \sigma) \in \mathbf{k}[T]/(T^n) \otimes_{\mathbf{k}} \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ (et $\Phi_n(\mu^* \sigma) = \Phi_{n+1}(\mu^* \sigma) \bmod (T^n)$).

Notons $d : \mathbf{k}[T] \rightarrow \mathbf{k}$, $P(T) \mapsto P'(0)$. On a $\mathfrak{g}_a = \mathbf{k}d$ et pour tout n , $\mathfrak{g}_a^n = \mathbf{k}d^n$ où $d^n : \mathbf{k}[T] \rightarrow \mathbf{k}$, $P(T) \mapsto P^{(n)}(0)$.

L'action de $U(\mathfrak{g}_a)$ sur $\Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ est telle que :

$$d^n . \sigma = (d^n \otimes 1)(\Phi_n(\mu^* \sigma))$$

pour tout $n > 0$.

On a alors par hypothèse :

$$\forall n \geq n_0, (d^n \otimes 1)(\Phi_n(\mu^* \sigma)) = d^n . \sigma = 0 .$$

Donc il existe $\sigma_1, \dots, \sigma_{n_0} \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ tels que :

$$\Phi_n(\mu^* \sigma) = 1 \otimes \sigma_1 + \dots + T^{n_0-1} \otimes \sigma_{n_0} \bmod (T^n)$$

pour tout $n \geq n_0$ (il suffit de poser $\sigma_i := (i-1)!d^{i-1}\sigma$ pour $1 \leq i \leq n_0$).

Posons :

$$\sigma' := 1 \otimes \sigma_1 + T \otimes \sigma_2 + \dots + T^{n_0-1} \otimes \sigma_{n_0} \in \mathbf{k}[T] \otimes_{\mathbf{k}} \Gamma(\Omega, \mathcal{F}) = \Gamma(\mathbb{G}_a \times \Omega, p^* \mathcal{F}) .$$

Comme $\Phi_n(\mu^* \sigma) = \sigma'|_{\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega}$ pour tout $n \geq n_0$, comme Φ est un isomorphisme de faisceaux et comme $p^* \mathcal{F}$ est un faisceau localement libre, on a :

$$\mu^* \sigma \Big|_{\mu^{-1}\Omega \cap \mathbb{G}_a \times \Omega} = \Phi^{-1}(\sigma') \Big|_{\mathbb{G}_a \times \Omega \cap \mu^{-1}\Omega}$$

et donc (comme $\mu^* \mathcal{F}$ est un faisceau), si l'on pose $W := \mu^{-1}\Omega \cup \mathbb{G}_a \times \Omega$, il existe $\hat{\sigma} \in \Gamma(W, \mu^* \mathcal{F})$ tel que : $\mu^* \sigma = \hat{\sigma}|_{\mu^{-1}\Omega}$.

Soit $g \in \mathbb{G}_a$. On pose $i : Y \rightarrow \mathbb{G}_a \times Y$, $y \mapsto (g, g^{-1}y)$. On a :

$$\Omega \cup g\Omega \subseteq i^{-1}W \text{ et } \mu \circ i = \text{Id}_Y .$$

On a donc :

$$i^* \mu^* \sigma = \sigma ;$$

$$i^* \hat{\sigma} \in \Gamma(i^{-1}W, \mathcal{F}) ;$$

$$\sigma = i^* \hat{\sigma}|_{\Omega} .$$

En particulier, on a prolongé σ à l'ouvert $\Omega \cup g\Omega$. Puisqu'on peut le faire pour tout $g \in \mathbb{G}_a$, σ se prolonge à l'ouvert $\cup_{g \in \mathbb{G}_a} g\Omega$ qui est stable par \mathbb{G}_a .

Q.e.d.

8.4 Opérateurs différentiels tordus

Soit $\lambda = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$ un caractère de \hat{T} . On notera \mathcal{D}_λ le faisceau d'opérateurs différentiels sur \overline{G} tordu par le faisceau inversible \mathcal{L}_λ :

$$\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{G}}} \mathcal{D}_{\overline{G}} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{G}}} \mathcal{L}_\lambda^{-1} .$$

Rappelons les notations du paragraphe 6.1 :

$$f_\lambda := f_1^{\lambda_1} \boxtimes f_2^{\lambda_2} \Big|_{(\overline{G})_0} \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda) .$$

Notons Φ_λ le morphisme d'algèbres :

$$\Phi_\lambda : U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$$

induit par l'action de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sur \mathcal{L}_λ . En utilisant les formules de changement de variables de la proposition 8.1, on obtient :

Proposition 8.6 *Dans l'anneau $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_\lambda)$, on a :*

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(Y_1^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(Y_1^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} - \lambda_2 U_{1,2} , \\ \Phi_\lambda(Y_2^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(Y_2^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} - \lambda_1 U_{2,3} , \\ \Phi_\lambda(Y_3^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(Y_3^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} - \lambda_1 U_{1,3} + \lambda_2 (U_{1,2} U_{2,3} - U_{1,3}) , \\ \Phi_\lambda(X_1^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(X_1^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} , \\ \Phi_\lambda(X_2^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(X_2^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} , \\ \Phi_\lambda(X_3^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(X_3^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} . \end{aligned}$$

Démonstration : Si $a \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{O}_{\overline{G}})$ et si $\xi \in \mathfrak{g}$, alors :

$$\xi^{(g)}.(af_\lambda) = (\xi^{(g)}.a + \frac{\xi^{(g)}.f_\lambda}{f_\lambda})f_\lambda .$$

Q.e.d.

On a aussi un opérateur différentiel tordu d'ordre 2 particulier :

Lemme 8.7 *Pour tout caractère λ de \widehat{T} ,*

$$f_\lambda \otimes \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \otimes f_\lambda^{-1} \in \Gamma(\overline{G}, \mathcal{D}_\lambda) .$$

Démonstration : Posons $D_\lambda := f_\lambda \otimes \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \otimes f_\lambda^{-1}$. Comme pour le théorème 8.4, il suffit de vérifier que D_λ est $U(\mathfrak{n}^- \times n)$ et $U(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}^-)$ -fini. Puisque $D_\lambda \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_\lambda)$ et que $(\overline{G})_0$ est $B \times B^-$ -stable, on sait déjà que D_λ est $U(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}^-)$ -fini. Pour le côté $U(\mathfrak{n}^- \times \mathfrak{n})$ -fini, nous allons montrer que $D_\lambda \in \Gamma(B^-B, \mathcal{D}_\lambda)$.

Remarquons que $B^-B = \{[g] \in G : g_{1,1}\Delta_{3,3} \neq 0\}$.

On pose :

$$f_\lambda^* : (g, g') \mapsto (g_{1,1})^{\lambda_1} (g'_{3,3})^{\lambda_2}$$

c'est une application définie sur un ouvert de $M_3(\mathbf{k}) \times M_3(\mathbf{k})$. Si on pose $(\overline{G})_\infty := \{([g], [g']) \in \overline{G} : g_{1,1}g'_{3,3} \neq 0\}$, f_λ^* définit un élément de $\Gamma((\overline{G})_\infty, \mathcal{L}_\lambda)$.

Dans l'espace $\Gamma(BB^- \cap B^-B, \mathcal{L}_\lambda)$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} f_\lambda &= \left(\frac{g_{3,3}}{g_{1,1}} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{g'_{1,1}}{g'_{3,3}} \right)^{\lambda_2} f_\lambda^* \\ &= \left(\frac{g_{3,3}}{g_{1,1}} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{\Delta_{1,1}}{\Delta_{3,3}} \right)^{\lambda_2} f_\lambda^* . \end{aligned}$$

Donc en notant h la fraction rationnelle sur G :

$$\left(\frac{g_{3,3}}{g_{1,1}} \right)^{-\lambda_1} \left(\frac{\Delta_{1,1}}{\Delta_{3,3}} \right)^{-\lambda_2}$$

on a :

$$D_\lambda = f_\lambda^* \otimes h^{-1} D_0 h \otimes f_\lambda^{*-1} .$$

Calculons dans l'anneau $\Gamma(BB^- \cap B^-B, \mathcal{D}_{\overline{G}})$:

$$\begin{aligned} h^{-1} D_0 h &= h^{-1} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} h \\ &= h^{-1} \partial_{\alpha_1} h \partial_{\alpha_2} + h^{-1} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} (h) \\ &= h^{-1} h \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} + h^{-1} \partial_{\alpha_1} (h) \partial_{\alpha_2} + h^{-1} \partial_{\alpha_1} (\partial_{\alpha_2} (h)) + h^{-1} \partial_{\alpha_2} (h) \partial_{\alpha_1} \end{aligned}$$

$$(1) \quad \begin{aligned} &= D_0 + h^{-1}\partial_{\alpha_1}(h)\partial_{\alpha_2} + h^{-1}\partial_{\alpha_2}(h)\partial_{\alpha_1} \\ &+ (h^{-1}\partial_{\alpha_1}(h))(h^{-1}\partial_{\alpha_2}(h)) + \partial_{\alpha_1}(h^{-1}\partial_{\alpha_2}(h)) \end{aligned}$$

Or :

$$\partial_{\alpha_1} = \frac{\Delta_{1,1}}{g_{3,3}}\partial_{g_{1,1}}$$

donc :

$$(2) \quad \begin{aligned} h^{-1}\partial_{\alpha_1}(h) &= -\lambda_1 \frac{\partial_{\alpha_1}(g_{3,3})}{g_{3,3}} - \lambda_2 \frac{\partial_{\alpha_1}(\Delta_{1,1})}{\Delta_{1,1}} + \frac{\partial_{\alpha_1}((g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2})}{(g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2}} \\ &= \frac{\partial_{\alpha_1}((g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2})}{(g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2}} \\ &\in \frac{\Delta_{1,1}}{g_{3,3}} \mathbf{k}[g_{i,j}, (g_{1,1})^{-1}, (\Delta_{3,3})^{-1}] . \end{aligned}$$

De même, comme $\partial_{\alpha_2} = \frac{g_{3,3}}{\Delta_{1,1}}(\Delta_{2,2}\partial_{g_{1,1}} + \Delta_{1,1}\partial_{g_{2,2}} + \Delta_{2,1}\partial_{g_{1,2}} + \Delta_{1,2}\partial_{g_{2,1}})$, on a :

$$(3) \quad \begin{aligned} h^{-1}\partial_{\alpha_2}(h) &= -\lambda_1 \frac{\partial_{\alpha_2}(g_{3,3})}{g_{3,3}} - \lambda_2 \frac{\partial_{\alpha_2}(\Delta_{1,1})}{\Delta_{1,1}} + \frac{\partial_{\alpha_2}((g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2})}{(g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2}} \\ &= -\lambda_2 \frac{g_{3,3}^2}{\Delta_{1,1}} + \frac{\partial_{\alpha_2}((g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2})}{(g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2}} \\ &\in \frac{g_{3,3}}{\Delta_{1,1}} \mathbf{k}[g_{i,j}, (g_{1,1})^{-1}, (\Delta_{3,3})^{-1}] . \end{aligned}$$

On déduit donc de (1), (2) et (3) que $h^{-1}D_0h$ est de la forme :

$$a_{1,1}\partial_{g_{1,1}} + a_{2,2}\partial_{g_{2,2}} + a_{1,2}\partial_{g_{1,2}} + a_{2,1}\partial_{g_{2,1}}$$

où $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{1,2}, a_{2,1} \in \mathbf{k}[g_{i,j}, (g_{1,1})^{-1}, (\Delta_{3,3})^{-1}]$.

En conséquence : $h^{-1}D_0h \in \Gamma(B^-B, \mathcal{D}_{\overline{G}})$.

Q.e.d.

9 Irréductibilité des espaces de sections globales

Théorème 9.1 *Pour tout caractère λ de \widehat{T} , le $\mathcal{D}_{\lambda}(\overline{G})$ -module $\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_{\lambda})$ est nul ou irréductible.*

Démonstration : Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $\lambda = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ (d'où : $\lambda^* = \lambda_2\omega_1 + \lambda_1\omega_2$).

Rappelons que

$$\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{m_1, m_2 \geq 0 \\ \lambda^* - m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2 \text{ dominant}}} U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}).\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}f_\lambda .$$

On note $L(\nu)$ le \mathfrak{g} -module simple de plus haut poids ν (pour tout caractère de \widehat{T} , ν , dominant). On a un isomorphisme de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -modules irréductibles :

$$U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}).\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}f_\lambda \simeq \text{End}_{\mathbf{k}} L(\nu)$$

pour tout $\nu = \lambda^* - m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2$ dominant. En effet, la section $\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}f_\lambda$ est un $\widehat{B} \times \widehat{B}^-$ -vecteur propre de poids $(\nu, -\nu)$.

Posons $\sigma_\nu := \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}f_\lambda \in \Gamma(BB^-, \mathcal{L}_\lambda)$ pour tout caractère $\nu = \lambda^* - m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2$ de \widehat{T} . Lorsque $m_1, m_2 \geq 0$, $\sigma_\nu \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda)$ et lorsque, de plus, ν est dominant, $\sigma_\nu \in \Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda)$.

Comme

$$\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\nu} U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}).\sigma_\nu$$

(somme sur les caractères ν dominants de $\lambda^* - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_2$), comme $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ agit sur $\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda)$ via un morphisme d'algèbres $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$ et comme les $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -modules $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}).\sigma_\nu$ sont irréductibles, il suffit de montrer que

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$$

pour tous $\nu, \nu' \in \lambda^* - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_2$ dominants.

Soient m_1, m_2, m'_1, m'_2 des entiers positifs tels que $\nu = \lambda^* - m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2$, $\nu' = \lambda^* - m'_1\alpha_1 - m'_2\alpha_2$.

Soient $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $\nu = \nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2$.

On a donc :

$$(4) \quad \nu_1 = \lambda_2 - 2m_1 + m_2 \text{ et } \nu_2 = \lambda_1 + m_1 - 2m_2 .$$

1-er cas : $\nu' = \nu + \alpha_1 + \alpha_2$.

Dans ce cas, $m_1 = m'_1 + 1 > 0$ et $m_2 = m'_2 + 1 > 0$.

D'après le lemme 8.7, l'opérateur $D_\lambda := f_\lambda \otimes D_0 \otimes f_\lambda^{-1}$ est dans $\mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$.

Or :

$$\begin{aligned} D_\lambda.\sigma_\nu &= (f_\lambda \otimes D_0 \otimes f_\lambda^{-1}).\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}f_\lambda \\ &= D_0(\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2})f_\lambda \\ &= m_1m_2\alpha_1^{m_1-1}\alpha_2^{m_2-1}f_\lambda \\ &= m_1m_2\sigma_{\nu'} \end{aligned}$$

et $\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$.

Pour les cas suivants, on va utiliser des opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$ particuliers.

Comme le faisceau \mathcal{L}_λ est $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -linéarisé, l'algèbre $\mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$ est un $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -module. Si $w \in \widehat{G}$, on note :

$$\tilde{w} := (w, w) \in \widehat{G} \times \widehat{G}$$

$$\text{et on pose : } D_\lambda^w := \tilde{w}.D_\lambda = \tilde{w}.(D_\lambda(\tilde{w}^{-1}.\cdot)) \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).$$

Soit

$$c := \frac{1}{3}(H_1 + H_2) + \frac{1}{9}(H_1^2 + H_2^2 + H_1H_2) + \frac{1}{3}(Y_1X_1 + Y_2X_2 + Y_3X_3) \in U(\mathfrak{g}) .$$

L'élément c est dans $Z(\mathfrak{g})$ le centre de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ et, pour tout caractère $\mu = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$, agit comme une homothétie sur le \mathfrak{g} -module irréductible $L(\mu)$ de plus haut poids μ :

$$\forall v \in L(\mu), \quad c.v = \chi_\mu(c)v$$

$$\text{où } \chi_\mu(c) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{3} + \frac{\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2}{9}.$$

Identifions l'élément $c \in Z(\mathfrak{g})$ avec l'élément $(c, 0)$ du centre $Z(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

Lemme 9.2 *Soit $f \in \mathbf{k}[U_{i,j} : 1 \leq i \neq j \leq 3] \subseteq \mathbf{k}[(\overline{G})_0]$. Pour tout caractère ν de \widehat{T} qui appartient à l'ensemble :*

$$\lambda^* - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_2 ,$$

on a l'égalité suivante dans $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda)$:

$$(5) \quad (c - \chi_\nu(c))(f\sigma_\nu)$$

$$(6) \quad = \frac{1}{3} \left(\alpha_1 \partial_{U_{1,2}} \partial_{U_{2,1}} \right.$$

$$(7) \quad \left. + \alpha_2 (\partial_{U_{2,3}} + U_{1,2} \partial_{U_{1,3}}) (\partial_{U_{3,2} + U_{2,1}} \partial_{U_{3,1}}) \right.$$

$$(8) \quad \left. + \alpha_1 \alpha_2 \partial_{U_{1,3}} \partial_{U_{3,1}} \right) (f)\sigma_\nu$$

Démonstration : Notons $F := Z_1 \cap Z_2$ l'unique $G \times G$ -orbite fermée de \overline{G} et $\mathcal{I}_F := \mathcal{I}_{Z_1} + \mathcal{I}_{Z_2}$ son idéal de définition dans $\mathcal{O}_{\overline{G}}$.

On remarque que pour tout caractère μ de \widehat{T} , on a un isomorphisme de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -modules :

$$(9) \quad \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\mu^*}) / \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\mu^*} \otimes \mathcal{I}_F)$$

$$(10) \quad \simeq \Gamma((\overline{G})_0 \cap F, \mathcal{L}_{\mu^*}|_F)$$

$$(11) \quad \simeq \Gamma(BB^-/B^- \times B^-B/B, \mathcal{L}_{G/B^- \times G/B}(\mu, -\mu))$$

$$(12) \quad \simeq M_{(\mu, -\mu)}^*$$

où $\mathcal{L}_{G/B^- \times G/B}(\mu, -\mu)$ est le faisceau inversible sur la variété de drapeaux $G/B^- \times G/B$ associé au caractère $(\mu, -\mu)$ de $\widehat{T} \times \widehat{T}$ et $M_{(\mu, -\mu)}^*$ est le dual du $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -module de Verma de plus haut poids $(\mu, -\mu)$.

Tout élément de $Z(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ agit sur $M_{(\mu, -\mu)}^*$ comme une homothétie donc on a pour tout $\sigma \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\nu^*})$,

$$(c - \chi_{\nu}(c)).\sigma \in \alpha_1 \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\nu^*}) + \alpha_2 \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\nu^*}) .$$

D'un autre côté, grâce à la proposition 8.1 on peut exprimer l'opérateur $\Phi_{\nu^*}(c) \in \Gamma(\overline{G}, \mathcal{D}_{\nu^*})$ en fonction des coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, U_{i,j}, 1 \leq i \neq j \leq 3$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu^*}(c) &= \frac{1}{3} \sigma_{\nu} \otimes \left(\alpha_1 \partial_{U_{1,2}} \partial_{U_{2,1}} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 (\partial_{U_{2,3}} + U_{1,2} \partial_{U_{1,3}}) (\partial_{U_{3,2} + U_{2,1}} \partial_{U_{3,1}}) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_1 \alpha_2 \partial_{U_{1,3}} \partial_{U_{3,1}} \right) + \dots \otimes \sigma_{\nu}^{-1} \end{aligned}$$

où les ... sont mis pour des opérateurs dans $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ qui ne changent pas les degrés en α_1 et en α_2 des monômes :

$$\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \prod_{1 \leq i \neq j \leq 3} U_{i,j}^{n_{i,j}} .$$

On a ainsi l'égalité de l'énoncé dans :

$$\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\nu^*}) \subseteq \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\lambda}) .$$

Q.e.d.

2-ème cas : $\nu' = \nu + \alpha_2$

Dans ce cas, $m_2 = m'_2 + 1 \geq 1$.

$$\text{Soit } s_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widehat{G}.$$

Grâce aux formules de changement de variables de la proposition 8.1, on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1^{-1}.\sigma_{\nu} &= \frac{g_{3,3}^{\nu_2 - \lambda_1} \Delta^{m_1} \Delta_{2,2}^{\nu_1}}{\Delta_{1,1}^{\lambda_2}} f_{\lambda} \\ &= \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1})^{\nu_1} f_{\lambda} \\ &= (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1})^{\nu_1} \sigma_{\nu} \\ &D_{\lambda}(\tilde{s}_1^{-1} \sigma_{\nu}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_2 \alpha_1^{m_1-1} \alpha_2^{m_2-1} (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1})^{\nu_1-1} (m_1 (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1}) + \nu_1 \alpha_1) f_\lambda \\
&= m_2 (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1})^{\nu_1-1} (m_1 \sigma_{\nu+\rho} + \nu_1 \sigma_{\nu+\alpha_2}) f_\lambda \\
&\quad D_\lambda^{s_1}(\sigma_\nu) \\
&= \tilde{s}_1 \cdot (D_\lambda(\tilde{s}_1^{-1} \cdot \sigma_\nu)) \\
&= m_2 \alpha_1^{m_1-1} \alpha_2^{m_2-1} ((m_1 + \nu_1) \alpha_1 + m_1 U_{1,2} U_{2,1}) f_\lambda \\
&= m_2 (m_1 U_{1,2} U_{2,1} \sigma_{\nu+\rho} + (m_1 + \nu_1) \sigma_{\nu+\alpha_2}) .
\end{aligned}$$

On a donc grâce au lemme 9.2 :

$$\begin{aligned}
(13) \quad & (c - \chi_{\nu+\rho}(c)) \cdot D_\lambda^{s_1}(\sigma_\nu) \\
(14) \quad &= m_2 \left(\frac{m_1}{3} + (m_1 + \nu_1) (\chi_{\nu+\alpha_2}(c) - \chi_{\nu+\rho}(c)) \right) \sigma_{\nu+\alpha_2} \\
(15) \quad &= m_2 \left(\frac{m_1}{3} - (m_1 + \nu_1) \frac{\nu_1 + 2}{3} \right) \sigma_{\nu+\alpha_2} \\
(16) \quad &= -\frac{m_2}{3} ((m_1 + \nu_1)(\nu_1 + 1) + \nu_1) \sigma_{\nu+\alpha_2} .
\end{aligned}$$

Or, comme ν est dominant, $\nu_1 \geq 0$. De plus, $m_1 \geq 0, m_2 \geq 1$ donc

$$\frac{m_2}{3} ((m_1 + \nu_1)(\nu_1 + 1) + \nu_1) > 0$$

et

$$\sigma_{\nu+\alpha_2} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}) \cdot \sigma_\nu .$$

De même on traite le cas où $\nu' = \nu + \alpha_1$.

3-ème cas : $\nu' = \nu - \alpha_1$.

$$\text{On pose } w := s_1 s_2 \text{ où } s_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Comme précédemment, on peut calculer $D_\lambda^w(\sigma_\nu)$. Et on trouve :

$$\begin{aligned}
&(c - \chi_{\nu+\rho}(c))(c - \chi_{\nu+\alpha_1}(c))(c - \chi_{\nu-\alpha_1+\alpha_2}(c))(c - \chi_{\nu+\alpha_2}(c))(c - \chi_\nu(c)) \cdot D_\lambda^w \sigma_\nu \\
&= r \sigma_{\nu-\alpha_1}
\end{aligned}$$

où :

$$r =$$

$$-\frac{2}{3^5} (\nu_2 + 3)(\nu_1 + m_1 + 1)(\nu_1 + \nu_2 + 1)(\nu_1 + \nu_2 + m_2 + 2)(2\nu_1 + \nu_2 + 3)\nu_1(\nu_1 - 1)$$

$$> 0$$

et donc $\sigma_{\nu-\alpha_1} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$.

De même, on traite le cas où $\nu' = \nu - \alpha_2$.

4-ème cas : $\nu' = \rho$ et $\nu = 0$.

On a :

$$(17) \quad (c - \chi_{2\rho})(c - \chi_{\rho+\alpha_1})(c - \chi_\rho)D_\lambda^{w_0}\sigma_\rho = -\frac{2}{3}(m_1 + 4)(m_2 + 4)\sigma_0 .$$

Donc $\sigma_0 \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\rho$.

Cas général : Rappelons que :

$$(18) \quad \nu = \nu' + (m'_1 - m_1)\alpha_1 + (m'_2 - m_2)\alpha_2 .$$

On raisonne par récurrence sur $|m'_1 - m_1| + |m'_2 - m_2|$.

Si $m'_1 = m_1$ et $m'_2 = m_2$, $\sigma_{\nu'} = \sigma_\nu$ et il n'y a rien à montrer.

Si $m'_1 < m_1$, et $m'_2 < m_2$, d'après le 1-er cas,

$$\sigma_{\nu+\rho} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$$

et par hypothèse de récurrence,

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_{\nu+\rho} \subseteq \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu .$$

Si $m'_1 < m_1$ et $m'_2 \geq m_2$, $\nu + \alpha_1$ est dominant, d'après le deuxième cas,

$$\sigma_{\nu+\alpha_1} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$$

et par hypothèse de récurrence :

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_{\nu+\alpha_1} \subseteq \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu .$$

De même si $m'_1 \geq m_1$ et $m'_2 < m_2$, $\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$.

Si $m'_1 > m_1$ et $m'_2 \geq m_2$, alors si $m'_2 = m_2$, $\nu - \alpha_1$ est dominant et d'après le 3-ème cas et l'hypothèse de récurrence :

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_{\nu-\alpha_1} \subseteq \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu .$$

Si $m'_2 > m_2$, alors $\nu - \alpha_1$ ou $\nu - \alpha_2$ est dominant et encore d'après le 3-ème cas et l'hypothèse de récurrence :

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$$

ou bien ni $\nu - \alpha_1$ ni $\nu - \alpha_2$ ne sont dominants et alors nécessairement : $\nu' = 0$ et $\nu = \rho$ (car $\nu' < \nu$ et ν et ν' sont dominants) ; on utilise alors le 4-ème cas pour conclure. **Q.e.d.**

10 Autre cas

Notons S_3 l'espace des matrices 3×3 symétriques à coefficients dans \mathbf{k} .
Soit $\bar{\mathcal{C}}$ la variété :

$$\bar{\mathcal{C}} := \{([S], [S']) \in \mathbb{P}(S_3) \times \mathbb{P}(S_3) : SS' \in \mathbf{k}I_3\}$$

c'est la variété des « coniques complètes ». C'est une compactification magnifique (de rang 2) du SL_3 —espace homogène $\mathrm{PGL}_3/\mathrm{PSO}_3$ (on peut identifier $g\mathrm{PSO}_3 \in \mathrm{PGL}_3/\mathrm{PSO}_3$ et le couple $({}^tgg, g^{-1t}g^{-1})$).

Le théorème 9.1 est encore vrai si l'on remplace \bar{G} par $\bar{\mathcal{C}}$.

Pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur $\bar{\mathcal{C}}$, soit

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} := \mathcal{L} \otimes \mathcal{D}_{\bar{\mathcal{C}}} \otimes \mathcal{L}^{-1} .$$

Théorème 10.1 *Pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur $\bar{\mathcal{C}}$, le $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{C}})$ —module $\Gamma(X, \mathcal{L})$ est soit nul soit irréductible.*

Démonstration : C'est la même démonstration que dans le cas de \bar{G} . Cette fois, on utilise la grosse cellule :

$$(\bar{\mathcal{C}})_0 := \{([S], [S']) \in \bar{\mathcal{C}} : S_{1,1}S'_{3,3} \neq 0\} .$$

On note pour tout $g \in \mathrm{SL}_3(\mathbf{k})$, pour tout $([S], [S']) \in \bar{\mathcal{C}}$,

$$g \cdot ([S], [S']) := ({}^t g^{-1} S g^{-1}, [g S^t g])$$

$$\text{et } U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{2,3} \\ & 1 & u_{1,3} \\ & & 1 \end{pmatrix} : \forall 1 \leq i < j \leq 3, u_{i,j} \in \mathbf{k} \right\} .$$

On a un isomorphisme de variétés algébriques :

$$U \times \mathbb{A}^2 \rightarrow (\bar{\mathcal{C}})_0$$

$$(u, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \mapsto u \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ xy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} xy \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right) .$$

On remarque alors que

$$\partial_x \partial_y \in \Gamma(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{D}_{\bar{\mathcal{C}}}) .$$

Cet opérateur joue alors le même rôle que D_0 dans le cas de \bar{G} . **Q.e.d.**

Références

- [1] C. De Concini and C. Procesi. Complete symmetric varieties. *in Invariant theory (Montecatini, 1982), Lecture Notes in Math.*, 996 :1–44, 1983.
- [2] G. Kempf. The grothendieck-cousin complex of an induced representation. *Adv. in Math.*, 29(3) :310–396, 1978.
- [3] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. Geometric invariant theory. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, 34, 1994.